Basis-transitive Gruppen vom Rang 2

Lemma:
Sei G eine Permutationsgruppe, welche auf $\Omega=\{1,\dots n\}$ operiert. G_a sei der Stabilisator von $a\in\Omega$.
Dann gilt für alle $g\in G$ und $a\in\Omega$ $G_{a^g}=g^{-1}G_a g$.

Ab jetzt nehmen wir an, dass keine Punkte von der ganzen Gruppe festgelassen werden.

Theorem:
Sei G eine endliche basis-transitive Gruppe vom Rang 2, die auf Ω operiert. Dann gibt es ein System von Blöcken auf Ω, bei dem zwei Punkte aus unterschiedlichen Blöcken eine Basis von G bilden.

Bemerkung:
Das System von Blöcken ist genau dann trivial (d.h. die Blöcke haben alle die Größe 1), wenn G scharf 2-transitiv ist.

Satz:
Sei G eine endliche basis-transitive Gruppe vom Rang 2, die auf Ω operiert.
Dann ist die Anzahl der Fixpunkte von $g\in G\setminus\{id\}$ entweder 0 oder m mit $m=|Fix(G_a)|$ für $a\in\Omega$.

Korollar:
Eine endliche basis-transitive Gruppe G vom Rang 2, die auf Ω operiert, sei ein fehlerkorrigierender Code. Dann ist G r-fehlerkorrigierend mit $r=\left\lfloor\frac{((k-1)*m-1)}{2}\right\rfloor$ und

$m=\max_{g\in G\setminus\{id\}}|Fix(g)|=|Fix(G_a)|$ mit $a\in\Omega$ und $k=\frac{|\Omega|}{m}$.

Konstruktion eines Uncovering durch Basen aus einem beliebigen (v,2,t)-Uncovering

<u>(v,2,t)-Uncovering:</u> t+1 disjunkte Paare aus der v-elementigen Menge mit dem Zusatz, dass
$2*(t+1)\leqslant v \;\Leftrightarrow\; t\leqslant\frac{1}{2}*v-1$
Dies gilt auch für eine Gruppe G aus dem Korollar mit v = km und t = r.

Wähle nun die r+1 disjunkten Paare so, dass jedes Paar eine Basis von G bildet.
Es gibt k Blöcke der Form $Fix(G_a)$ mit $a\in\Omega$.

<u>1.Fall:</u> k gerade

Bilde Paare von Blöcken.
Es gibt dann $\frac{1}{2} * k$ Paare von Blöcken und pro „Blockpaar“ erhält man m disjunkte Paare, welche jeweils eine Basis von G bilden. Insgesamt erhält man also $\frac{1}{2} * k * m$ Basen.
Nach Voraussetzung gilt: $r+1 \leqslant \frac{1}{2} * k * m$.

<u>2.Fall:</u> k ungerade

Analog zum 1.Fall, aber es werden nur $\frac{1}{2} * (k-1)$ Paare aus k-1 Blöcken gebildet.
Da k ungerade ist gilt: $r+1 = \frac{1}{2} * (k-1) * m$.

Jedes so gewählte Paar bildet also eine Basis von G.
$\Rightarrow$ Uncovering durch Basen

<u>Bemerkung:</u>
Falls G scharf 2-transitiv ist, haben alle Blöcke die Größe 1 und man braucht deshalb nach obiger Konstruktion nur disjunkte Paare von Punkten nehmen.

<u>Beispiel 1:</u>
G = GL(2,q), die auf $F_q^2 \setminus \{0\}$ operiert.
Jede Gerade durch den Ursprung wird durch $\langle v \rangle$ mit $v \in F_q^2 \setminus \{0\}$ aufgespannt und stellt (ohne den Ursprung) eine Äquivalenzklasse der Größe q-1 dar.
Insgesamt gibt es q+1 Äquivalenzklassen.
Minimalabstand: $q^2 - q$

Beispiel 2:
G = PSL(3,3), die auf 78 Punkten operiert.

Bei der Operation von G, auf der projektiven Ebene der Ordnung 3, enthält der Stabilisator einer Geraden einen Normalteiler K, welche die Kleinsche Vierergruppe auf dieser Geraden induziert. K hat den Index 78 in G, also hat die Operation von G auf den Rechtsnebenklassen den Grad 78. K hat den Index 6 in seinem Normalisator $N_G(K)$.
Die Elemente von K lassen 6 Nebenklassen mit dieser Operation fest. Es kann gezeigt werden, dass diese Operation basis-transitiv vom Rang 2 ist. Da nach obigem Satz die Anzahl der Fixpunkte von $g \in G \setminus \{id\}$ entweder 0 oder 6 ist, ist der Typ ({0,6}, 78).

$\Omega := \{Kg : g \in G\}$
Sei $a = K \Rightarrow a \in \Omega$, $G_a = \{g \in G : Kg = K\}$
$N_G(G_a) = \{g \in G : g^{-1} G_a g = G_a\}$; $|N_G(G_a) : G_a| = |\{b \in \Omega : G_a = G_b\}| = |Fix(G_a)| = 6$

Um eine Darstellung von Ω zu erhalten, wird im Folgenden GAP verwendet.

Operation von G auf einer projektiven Ebene und dem Stabilisator einer Geraden

```
gap> G:=PSL(3,3);
Group( [ (5,8,11)(6,9,12)(7,10,13), (1,2,5)(3,8,7)(4,11,6)(9,10,13) ])
gap> H:=Stabilizer(G,[1,2,3,4],OnSets);
Group([ (6,7)(8,11)(9,13)(10,12), (5,7,6)(8,10,9)(11,13,12), (5,8,11)(6,9,12)(7,10,13),
(3,4)(6,7)(9,10)(12,13), (2,3)(6,7)(8,9)(11,13), (1,2,4)(6,11,10)(7,8,12) ])
```

Auflisten der Normalteiler (der dritte wird als K gewählt)

```
gap> list:=NormalSubgroups(H);;
gap> K:=list[3];
Group([ (1,2)(3,4)(6,11,7,8)(9,12,13,10), (1,4)(2,3)(6,12,7,10)(8,13,11,9), (6,7)(8,11)(9,13)(10,12),
(5,12,10)(6,13,8)(7,11,9), (5,7,6)(8,10,9)(11,13,12) ])
```

Operation von G auf den Rechtsnebenklassen

```
gap> G1:=Action(G,RightCosets(G,K),OnRight);
<permutation group with 2 generators>
```

Herausfinden der Fixpunkte und Einteilen in Äquivalenzklassen ergibt:

```
[ [ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ], [ 7, 8, 9, 10, 11, 12 ],
[ 13, 14, 15, 16, 17, 18 ], [ 19, 20, 21, 22, 23, 24 ],
[ 25, 26, 27, 28, 29, 30 ], [ 31, 32, 33, 34, 35, 36 ],
[ 37, 38, 39, 40, 41, 42 ], [ 43, 44, 45, 46, 47, 48 ],
[ 49, 50, 51, 52, 53, 54 ], [ 55, 56, 57, 58, 59, 60 ],
[ 61, 62, 63, 64, 65, 66 ], [ 67, 68, 69, 70, 71, 72 ],
[ 73, 74, 75, 76, 77, 78 ] ]
```

Uncovering durch Basen, konstruiert nach obiger Konstruktionsvorschrift

[[1, 7], [2, 8], [3, 9], [4, 10], [5, 11],
[6, 12], [13, 19], [14, 20], [15, 21], [16, 22],
[17, 23], [18, 24], [25, 31], [26, 32], [27, 33],
[28, 34], [29, 35], [30, 36], [37, 43], [38, 44],
[39, 45], [40, 46], [41, 47], [42, 48], [49, 55],
[50, 56], [51, 57], [52, 58], [53, 59], [54, 60],
[61, 67], [62, 68], [63, 69], [64, 70], [65, 71],
[66, 72]]

Wir haben 36 disjunkte Paare gefunden, die jeweils eine Basis bilden.
In diesem Beispiel ist $r = \left\lfloor (78-6) - \frac{1}{2} \right\rfloor = 35$.
Wir haben also genau genug gefunden.

Quelle: R. F. Bailey, *Permutation Groups, Error-Correcting Codes and Uncoverings*, Queen Mary, University of London, 02.11.2005